9.4 高斯公式　通量与散度

平面闭区域上的二重积分	Green 公式 ⟷	边界曲线上的曲线积分
空间闭区域上的三重积分	Gauss 公式 ⟷	边界曲面上的曲面积分

一、高斯公式

定理1　设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成，函数 $P(x, y, z)$、$Q(x, y, z)$、$R(x, y, z)$ 在 Ω 上具有连续的一阶偏导数，则有

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oint\!\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy, \qquad (1)$$

或 $$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oint\!\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS, \qquad (1')$$

这里 Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 是 Σ 上点 (x, y, z) 处的法向量的方向余弦。公式（1）或（1′）叫做高斯公式。

高斯公式的说明 ：

关于 Ω的边界曲面的外侧：

如： Ω是一般的单连通区域时， 曲面取外侧；

Ω是两个同心球面之间的区域（一维单连通区域），

例：$\Omega: 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$

则表面$x^2 + y^2 + z^2 = 4$取外侧

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$取内侧

（2）高斯公式成立的条件： Σ光滑或分片光滑，P、Q、R在 Ω上一阶偏导连续。

（3）Σ不闭合时，采取“补面”的方法：$\Sigma+\Sigma_1$ 封闭，所围区域 Ω。

$$\iint_{\Sigma} = \iint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1}$$

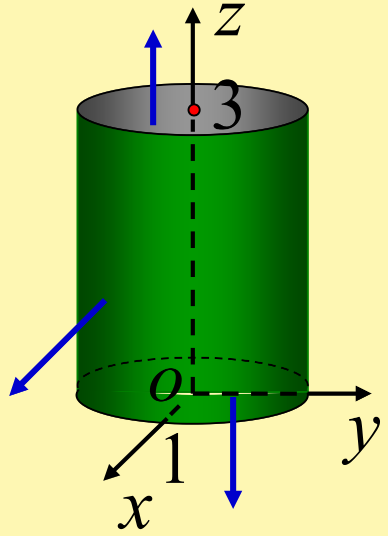
前提：易于计算

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv\text{和}\iint_{\Sigma_1} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

（4） P、Q、R在Ω内的某个点一阶偏导不连续，则采取“挖洞”的方法

例1 用Gauss公式计算 $\oiint_{\Sigma}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

其中Σ为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0, z=3$ 所围空间闭域 Ω 的整个边界曲面的外侧.



解 这里 $P=(y-z)x,\ Q=0,\ R=x-y$

利用Gauss公式，得

原式 $=\iiint_{\Omega}(y-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 对称性

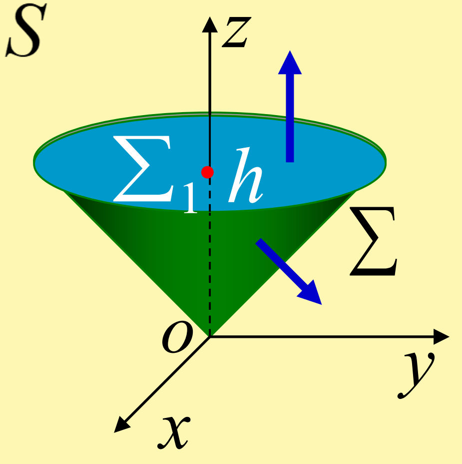
$$=-\iiint_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_0^3 z\,\mathrm{d}z=-\frac{9\pi}{2}$$

思考 若 Σ 改为内侧，结果有何变化?

例2 利用Gauss 公式计算积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

其中Σ为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于 $z=0$ 及 $z=h\ (h>0)$ 之间部分的下侧.



解 作辅助面

$$\Sigma_1: z=h,\ (x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le h^2,\text{ 取上侧}$$

记 Σ,Σ_1 所围区域为 Ω, 则

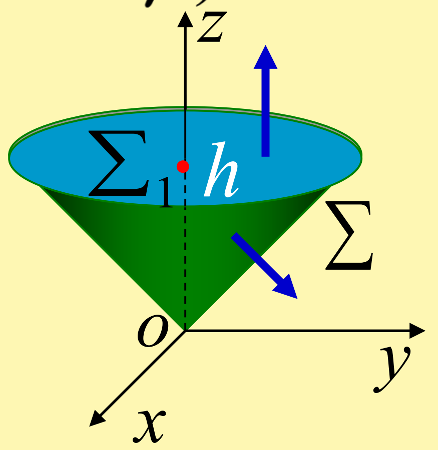
$\boxed{\text{在 }\Sigma_1\text{ 上 }\alpha=\beta=\frac{\pi}{2},\gamma=0}$

$$I=\left(\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\right)(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$=2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\iint_{\Sigma_1}z^2\,\mathrm{d}S$$

例2 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$

其中Σ为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于 $z=0$ 及 $z=h$ 之间部分的下侧.



$\Sigma_1: z=h,\quad (x,y)\in D_{xy}:\quad x^2+y^2\le h^2$

$$I=2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\iint_{\Sigma_1}z^2\,\mathrm{d}S$$

$$=2\iiint_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{D_{xy}}h^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$D_z: x^2+y^2\le z^2$

$$=2\int_0^h z\,dz\iint_{D_z}dxdy-\pi h^4=2\int_0^h z\cdot\pi z^2\,\mathrm{d}z-\pi h^4=-\frac{1}{2}\pi h^4$$

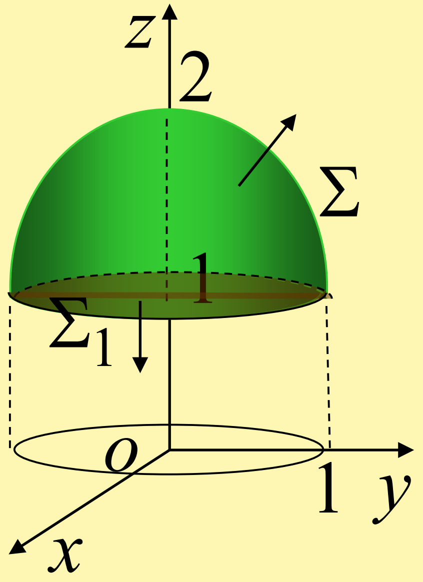
注: $\iint_{\Sigma_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$

$$=\iint_{\Sigma_1}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\iint_{\Sigma_1}z^2dxdy$$

例3 设Σ为曲面 $z=2-x^2-y^2,\ 1\le z\le 2$ 取上侧，求

$$I=\iint_{\Sigma}(x^3z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-x^2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-x^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解 $P=x^3z+x,\ Q=-x^2yz,\ R=-x^2z^2$



$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1$$ 作取下侧的辅助面

$\Sigma_1: z=1\quad (x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le 1$

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}$$

用柱坐标　　用极坐标

$$=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(-1)\iint_{D_{xy}}(-x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_1^{2-r^2}\mathrm{d}z-\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}$$

例4. 计算曲面积分

$$I = \oiint_{\Sigma} \frac{x}{r^3} \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{y}{r^3} \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \frac{z}{r^3} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 取外侧.

解: $I = \dfrac{1}{R^3} \oiint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \frac{1}{R^3} \iiint_{\Omega} 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 4\pi$$

思考: 本题Σ改为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 时, 应如何计算 ?

例5. 计算曲面积分

$$I=\oiint_{\Sigma}\frac{x}{r^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{y}{r^3}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{z}{r^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\Sigma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$取外侧.

解: $P=\frac{x}{r^3},Q=\frac{y}{r^3},R=\frac{z}{r^3}$, 当$(x,y,z)\neq(0,0,0)$时,

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{r^3-x\cdot 3r^2\frac{x}{r}}{r^6}=\frac{r^2-3x^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{r^2-3y^2}{r^5},\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{r^2-3z^2}{r^5}$$

所以除原点外处处有 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$

在椭球面内作辅助小球面 $\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$

取外侧。记Σ和Σ_1所围的区域为Ω，则

$$I=\oiint_{\Sigma}\frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\oiint_{\Sigma-\Sigma_1}+\oiint_{\Sigma_1}$$

$$=\iiint_{\Omega}0dv+\oiint_{\Sigma_1}\frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\oiint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ Σ_1取外侧，

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_{\Omega'}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\pi$$ 所围区域记为 Ω'

类似于推论9.2.1：

若封闭曲面Σ与Σ_1所围的一维单连通区域Ω，

函数P, Q, R在区域Ω上的一阶偏导数连续

且$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$ Σ与Σ_1为同侧曲面，则

$$\oiint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\oiint_{\Sigma_1} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

证：$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1^-}=\pm\iiint_{\Omega} 0dv$$

$$\oiint_{\Sigma}+\oiint_{\Sigma_1^-}=0 \qquad \oiint_{\Sigma}-\oiint_{\Sigma_1}=0$$

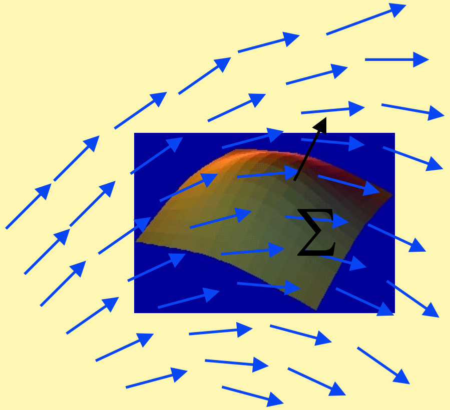
二、通量与散度

引例 设稳定流动的不可压缩流体的密度为1，速度场为

$$\vec{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

设Σ为场中任一有向曲面，则由对坐标的曲面积分的物理意义可知，单位时间通过曲面Σ 的流量为

$$\Phi=\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



由两类曲面积分的关系，流量还可表示为

$$\Phi=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

若Σ为方向向外的闭曲面, 则单位时间通过Σ的流量为

$$\oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \oiint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$$

也称为单位时间里从Σ所围区域流出或者散发出的量。

定义　设向量场

$$\vec{A}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

其中P, Q, R 具有连续一阶偏导数,Σ是场内的一片有向曲面,其单位法向量 $\vec{n}$, 则称 $\iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$

为向量场 $\vec{A}$ 通过有向曲面 Σ 的通量(流量)。

定义 设有向量场

$$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

其中P, Q, R 具有连续一阶偏导数, M(x, y, z)是场中任意一点，Σ是场内包含该点的一个分片光滑的封闭曲面,

它所围区域Ω的体积为V。如果当Ω 以任意方式向点M 收缩时，极限

$$\lim_{\Omega\to M}\frac{1}{V}\oiint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

都存在，则称此极限为向量场A在点M的散度(divergence)。

记作 $\operatorname{div}\vec{A}$ 散度为一数量，

表示场中某一点处通量对体积的变化率

Ω内任意点处的散度为 $\operatorname{div}\vec{A}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \lim_{\Omega\to M}\frac{1}{V}\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

$$= \lim_{\Omega\to M}\frac{1}{V}\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$

$$= \lim_{\Omega\to M}\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_{(\xi,\eta,\zeta)}\cdot\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v}{V}$$ 其中$(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$

$$= \lim_{\Omega\to M}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_{(\xi,\eta,\zeta)} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_M$$

高斯公式 $\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$

$$\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\vec{A}\cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega}\operatorname{div}\vec{A}\,dv$$

思考与练习 设$\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$取外侧，Ω为Σ所围立体，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,判断下列演算是否正确?

$$(1)\ \iint_\Sigma \frac{x^3}{r^3}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{y^3}{r^3}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{z^3}{r^3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\cancel{=}\iiint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^3}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z^3}{r^3}\right)\right]\mathrm{d}v=\cdots$$

$$(2)\ \iint_\Sigma \frac{x^3}{r^3}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{y^3}{r^3}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{z^3}{r^3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{R^3}\iint_\Sigma x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{R^3}\iiint_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v\ \cancel{=}\ \frac{3}{R}\iiint_\Omega \mathrm{d}v=4\pi R^2$$

内容小结

1. 高斯公式及其应用

公式: $\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

应用: (1) 计算曲面积分

(非闭曲面时注意添加辅助面的技巧)

(2) 推出闭曲面积分为零的充要条件:

$$\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\rightleftarrows \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

2. 通量与散度

设向量场 $\vec{A}=(P,Q,R)$，P，Q，R，在域G内有连续的一阶偏导数，则

向量场通过有向曲面 Σ 的通量为

$$\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

G 内任意点处的散度为

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$